

Problem 1. (15 points)

Suppose a 2×2 matrix X (not necessarily Hermitian nor unitary) is written as $X = a_0 I + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$, where I is a 2×2 identity matrix, a_0 and a_k ($k = 1, 2, 3$) are numbers and

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

are the Pauli matrices.

- (5 points) How are a_0 and a_k related to $\text{tr}(X)$ and $\text{tr}(\sigma_k X)$?
- (5 points) Obtain a_0 and a_k in terms of the matrix elements X_{ij} .
- (5 points) Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors for σ_2 .

Problem 2. (20 points)

Solve the following differential equations:

- (5 points) $y'' + 3y' + 2y = e^x$;
- (5 points) $1 + yy'' + (y')^2 = 0$;
- (10 points) $y'' - \frac{2y}{(1-x)^2} = 0$ by series solution about $x = 0$. Be sure to write down the recurrence relation.

Problem 3. (15 points)

Evaluate the following integrals:

- (5 points) $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2}$;
- (10 points) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{1+x^4}$.

Problem 4. (20 points) 已知 $\vec{A} = e^{(\vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{r}$ 以及 $C = (\vec{a} \cdot \vec{r}) e^{\vec{k} \cdot \vec{r}}$ ，其中 \vec{a} 與 \vec{k} 為常數向量。請計算

- (a) (7 points) $\nabla \cdot \vec{A}$ ，
- (b) (7 points) ∇C ，
- (c) (6 points) $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A}$ 。

Problem 5. (30 points) 若 $\{\psi_n(x)\}$ 代表在 (x_1, x_2) 範圍內是正交(orthogonal)且完備(complete)的一組基底函數 (basis functions)，則我們可在此範圍內將任意函數 $f(x)$ 展開成

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(x),$$

的形式，其中

$$c_n = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) \psi_n^*(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx}。$$

今令(i) $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 以及 $(1, \infty)$ 兩範圍內等於 0，而在 $(-1, 1)$ 範圍內等於 $\sin(2\pi x)$ ，以及(ii) $\psi_n(x) = \exp(i2n\pi v_0 x)$ (v_0 為待決定的常數)，然後照以上原則進行展開

(a) (10 points) 如果展開的範圍是 $(-1, 1)$ ，請決定適當的 v_0 值，使 $\{\exp(i2n\pi v_0 x)\}$ 為正交與完備的，然後計算 c_n 's 之值。如果展開的範圍變成 $(-2, 2)$ ，請重新決定適當的 v_0 值，使 $\{\exp(i2n\pi v_0 x)\}$ 為正交與完備的，然後計算 c_n 's 之值。

(b) (5 points) 如果展開的範圍變成 $(-\infty, \infty)$ ，請決定適當的 v_0 值，使 $\{\exp(i2n\pi v_0 x)\}$ 為正交與完備的，然後計算 c_n 's 之值。想想看，你的答案合理嗎？如不合理，請問其原因何在？

(c) (5 points) 請在 $(-\infty, \infty)$ 範圍內畫出 $f(x)$ 的函數圖，以及你在(a)中所計算出兩組展開式的函數圖。

(d) (10 points) 如果 $f(x)$ 在整個 $(-\infty, \infty)$ 範圍內都等於 $\sin(2\pi x)$ ，請決定適當的 v_0 值，使 $\{\exp(i2n\pi v_0 x)\}$ 為正交與完備的，然後計算 c_n 's 之值。